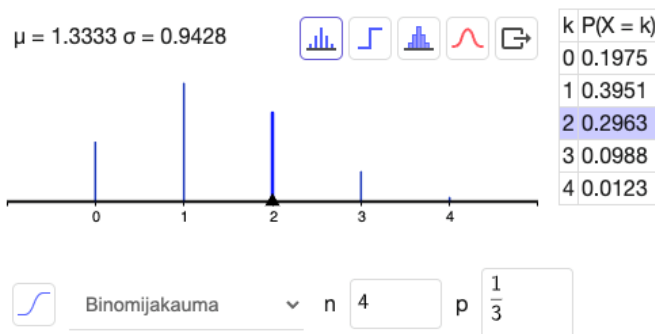


5.1

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 4$. Yksittäisessä toistossa todennäköisyys saada silmäluku 5 tai 6 on $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{3})$.

Määritetään satunnaismuuttujan jakauma GeoGebran todennäköisyyslaskurilla neljän desimaalin tarkkuudella.



Täsmälleen kaksi kertaa silmäluku 5 tai 6 saadaan todennäköisyydellä 0,2963.

Vastaus

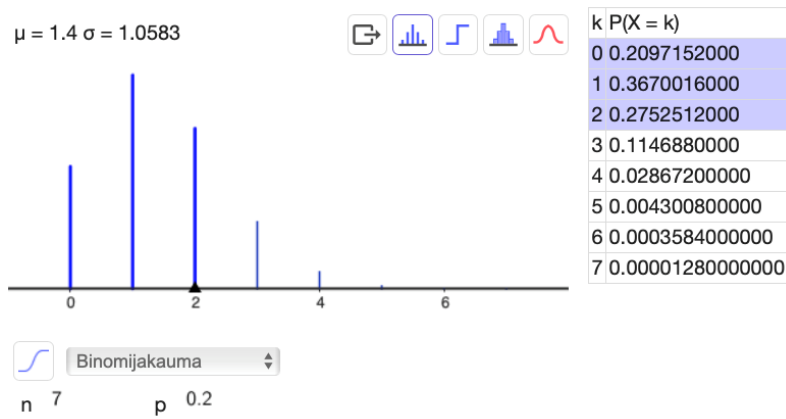
0,2963

5.2

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 7$. Yksittäinen punkki kantaa borreliabakteeria todennäköisyydellä $20\% = 0,20$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(7; 0,20)$.

- a) Määritetään satunnaismuuttujan jakauma GeoGebraan todennäköisyyslaskurilla vähintään kymmenen numeron tarkkuudella (jotta voidaan pyöristää neljän numeron tarkkuuteen).



Jakauma on neljän numeron tarkkuudella.

k	$P(X = k)$
0	0,2097
1	0,3670
2	0,2753
3	0,1147
4	0,02867
5	0,004 301
6	0,000 3584
7	0,000 012 80

- b) Lasketaan todennäköisyys, että korkeintaan kaksi punkeista kantaa borreliabakteeria.

$$\begin{aligned} P(\text{korkeintaan } 2) \\ &= 0,2097 + 0,3670 + 0,2753 \\ &= 0,852 \approx 0,85 \end{aligned}$$

- c) Todennäköisimmin seitsemän punkin näytteessä borreliabakteeria kantavien punkkien lukumäärä on 1.

Vastaus

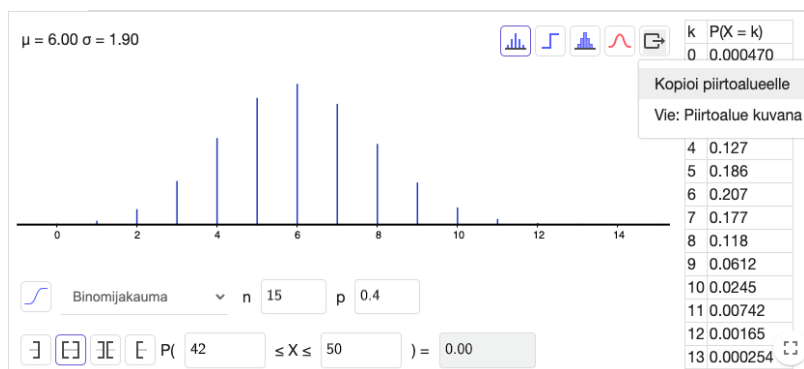
b) 0,85

c) 1

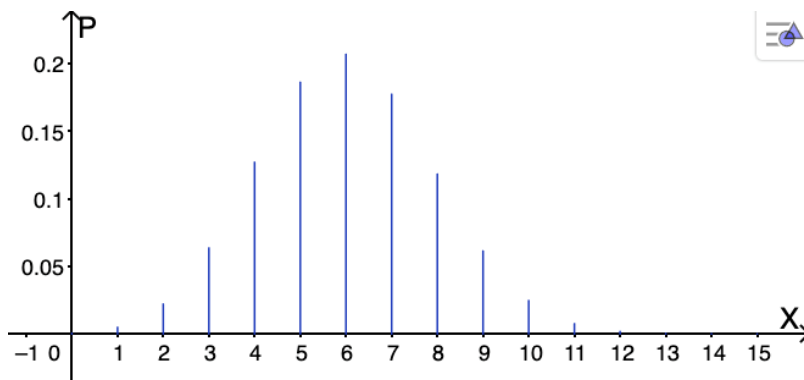
5.3

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

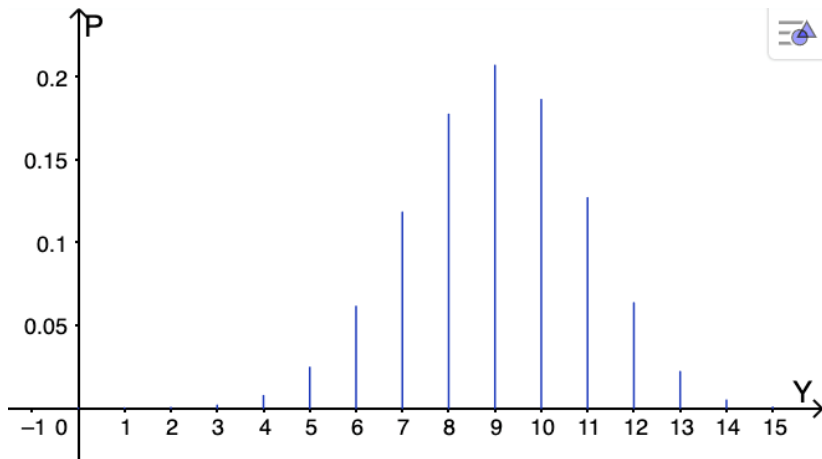
Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(15; 0,4)$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle.



Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(15; 0,6)$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimitetään vaaka-akseli kirjaimella Y ja pystyakseli kirjaimella P .

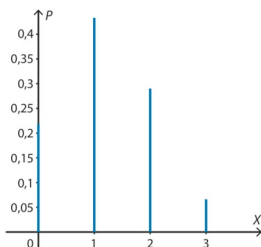


Jakauma $\text{Bin}(15; 0,4)$, missä $p = 0,4 < 0,5$, on painottunut keskikohdan $x = 7,5$ vasemmalle puolelle.

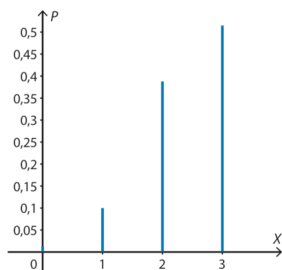
Jakauma $\text{Bin}(15; 0,6)$, missä $p = 0,6 > 0,5$, on painottunut keskikohdan $x = 7,5$ oikealle puolelle.

5.4

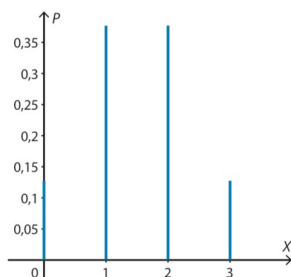
- a) Jakaumassa $\text{Bin}(3; 0,4)$, on $p = 0,4 < 0,5$, joten jakauma on painottunut keskikohdan 1,5 vasemmalle puolelle.



- b) Jakaumassa $\text{Bin}(3; 0,8)$, on $p = 0,8 > 0,5$, joten jakauma on painottunut keskikohdan 1,5 oikealle puolelle.



- c) Jakaumassa $\text{Bin}(3; 0,5)$, on $p = 0,5$, joten jakauma on symmetrinen keskikohdan 1,5 suhteen.

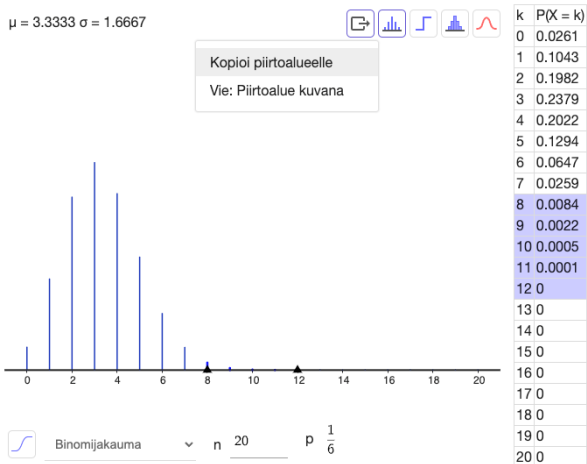


5.5

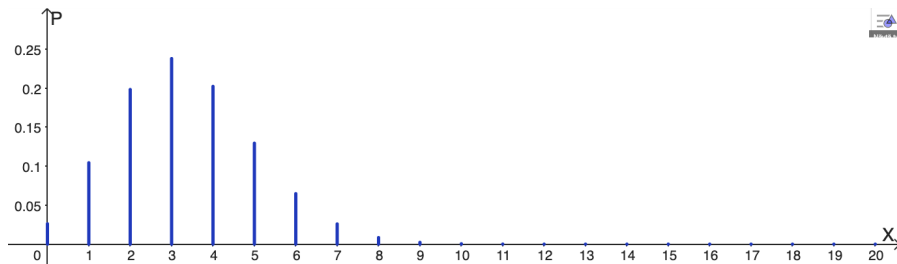
Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Satunnaismuuttuja X

Noppaa heitetään 20 kertaa, joten $n = 20$. Kuutosen todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $p = \frac{1}{6}$. Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(20, \frac{1}{6})$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle.



Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .

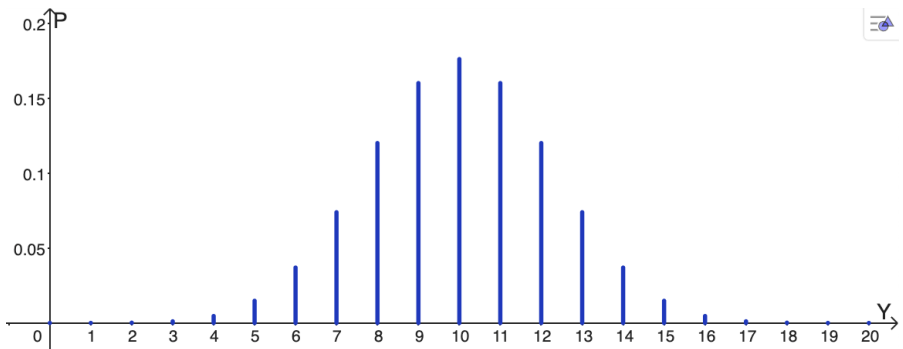


Satunnaismuuttuja Y

Parillisen silmäluvun todennäköisyys yksittäisessä toistossa on

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(20, \frac{1}{2})$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella Y ja pystyakseli kirjaimella P .



Jakauma $\text{Bin}(20, \frac{1}{6})$, missä $p \approx 0,17 < 0,5$, on painottunut keskikohdan vasemmalle puolelle.

Jakauma $\text{Bin}(20, \frac{1}{2})$, missä $p = 0,5$, on symmetrinen keskikohdan suhteen.

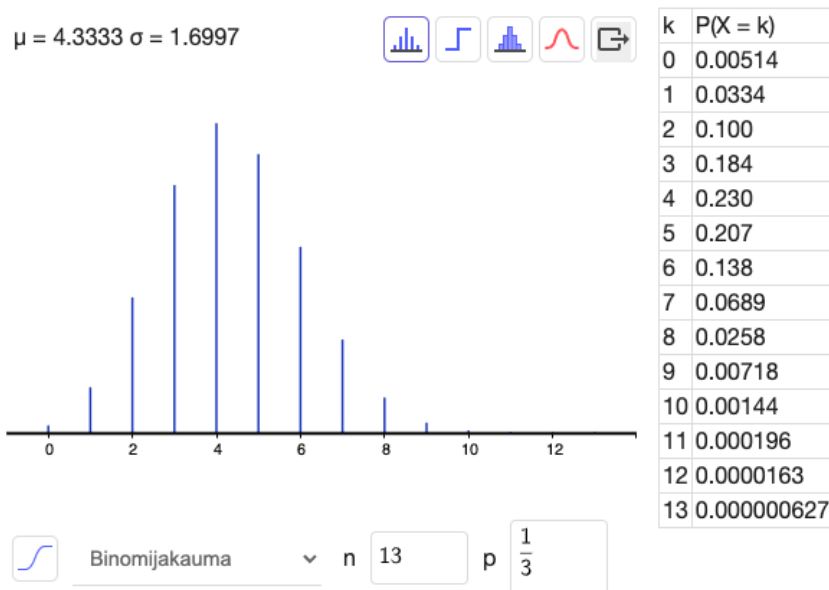
5.6

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 13$. Yksittäisessä toistossa oikean arvauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$.

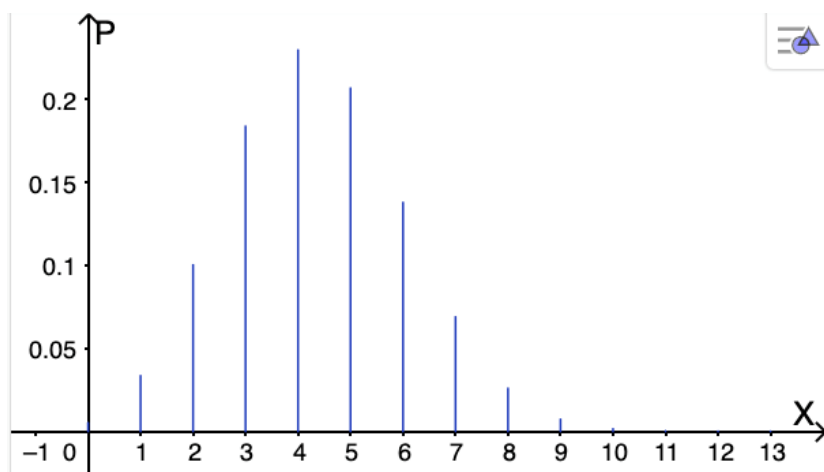
Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(13, \frac{1}{3})$.

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

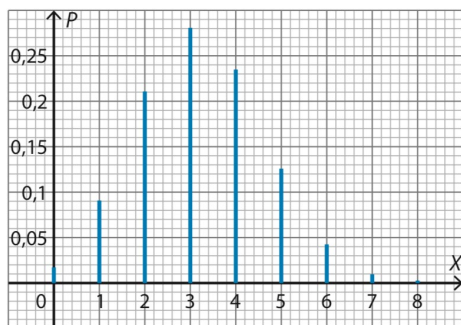
- a) Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(13; \frac{1}{3})$ kolmen numeron tarkkuudella.



- b) Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



5.7



- a) Kuvaajan vaaka-akselin perusteella satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8.
- b) Kohdassa $X = 2$ pylvään korkeus $P = 0,21$. Siis $P(X = 2) = 0,21$.
- c) Korkein pylväs on kohdassa $X = 3$, joten satunnaismuuttujan X todennäköisin arvo on 3.

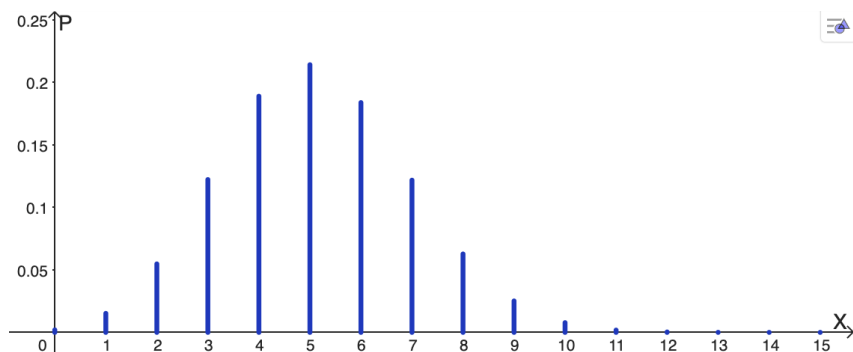
Vastaus

- a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8
b) 0,21
c) 3

5.8

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 15$. Yksittäisessä toistossa yksilapsisen perheen todennäköisyys $p = 0,34$.

- a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla. Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(15; 0,34)$. Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimitään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



- b) Kuvaan perusteella arvon 5 todennäköisyys on suurin.
Satunnaismuuttujan X todennäköisin arvo on siis 5 perhettä.

Vastaus

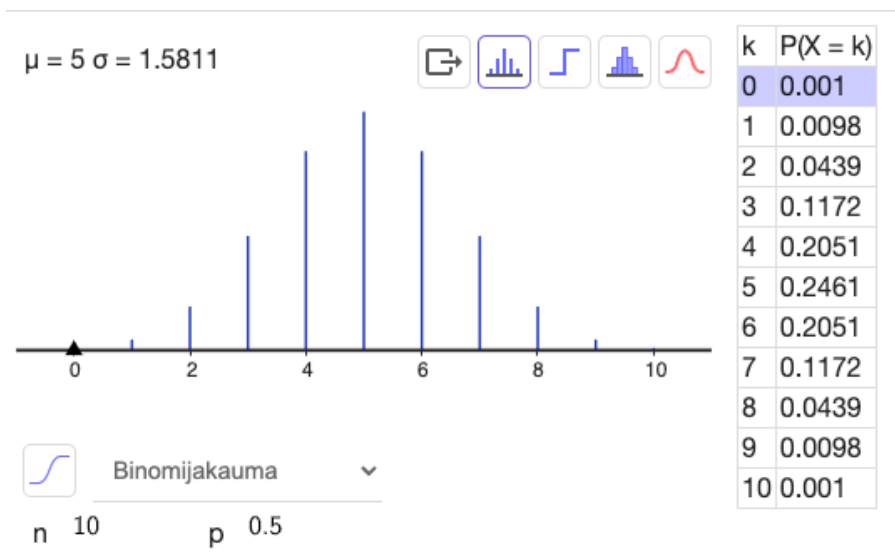
- b) 5 perhettä

5.9

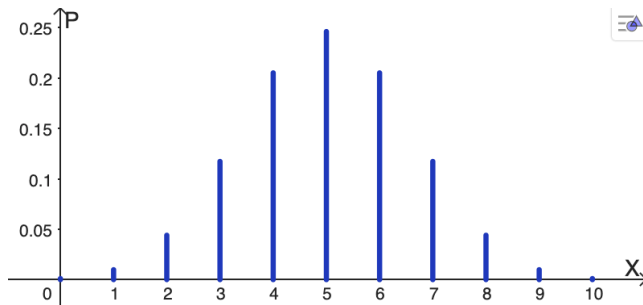
Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 10$. Yksittäisessä toistossa klaavan todennäköisyys $p = 0,5$.

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(10; 0,5)$ neljän desimaalin tarkkuudella.



b) Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



- c) Lasketaan todennäköisyys, että saadaan viisi tai kuusi klaavaa.

$$P = 0,2461 + 0,2051 = 0,4512$$

- d) Klaavoja saadaan enemmän kuin kruunia, jos klaavoja saadaan vähintään 6 kappaletta. Lasketaan todennäköisyys.

$$P = 0,2051 + 0,1172 + 0,0439 + 0,0098 + 0,0010 = 0,3770$$

- e) Todennäköisin klaavojen lukumäärä on 5 klaavaa.

Vastaus

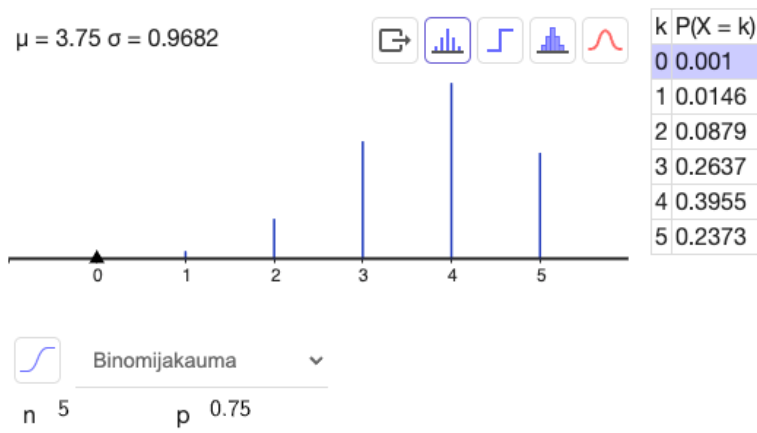
c) 0,4512

d) 0,3770

e) 5 klaavaa

5.10

- a) Jakaumassa $\text{Bin}(5; 0,75)$ toistojen lukumäärä $n = 5$. Siis satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3, 4 ja 5.
- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(5; 0,75)$ neljän desimaalin tarkkuudella.



- c) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0,0146 + 0,0879 + 0,2637 = 0,3662$$

Vastaus

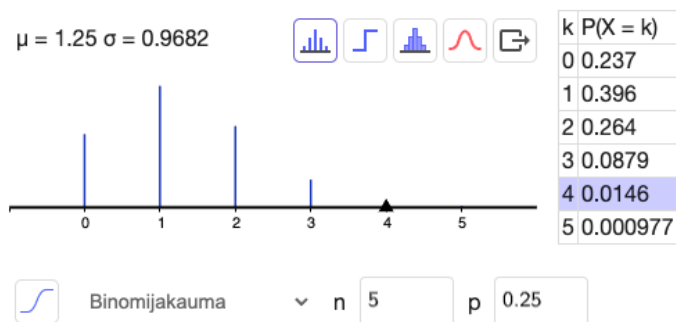
- a) 0, 1, 2, 3, 4 ja 5
c) 0,3662

5.11

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 5$. Yksittäisessä toistossa oikean vastauksen todennäköisyys on $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(5; 0,25)$.

Määritetään satunnaismuuttujan jakauma GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



Täsmälleen neljä oikein saadaan todennäköisyydellä 0,0146

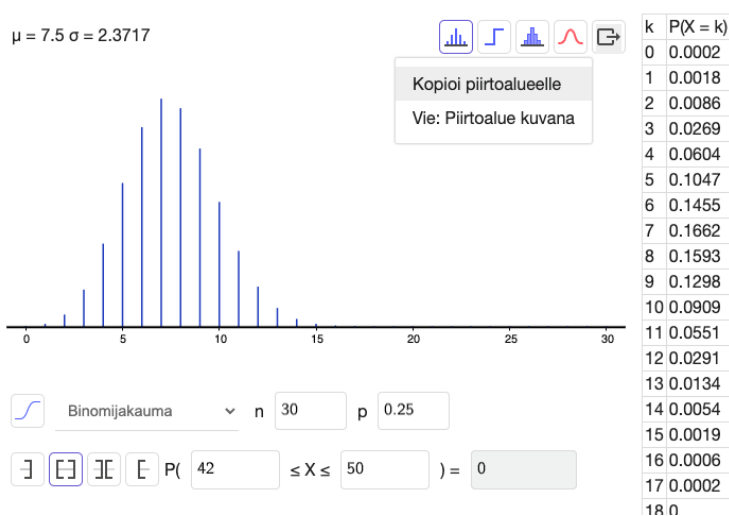
Vastaus

0,0146

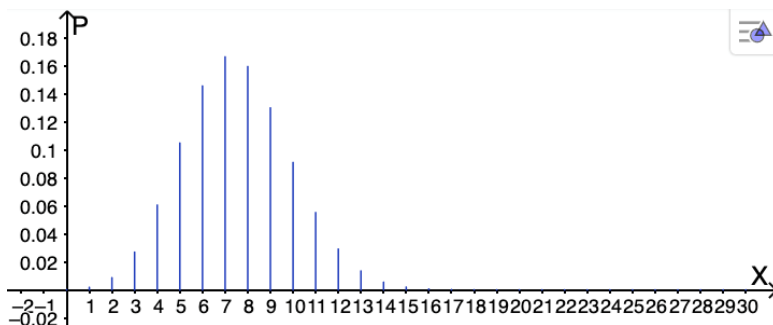
5.12

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

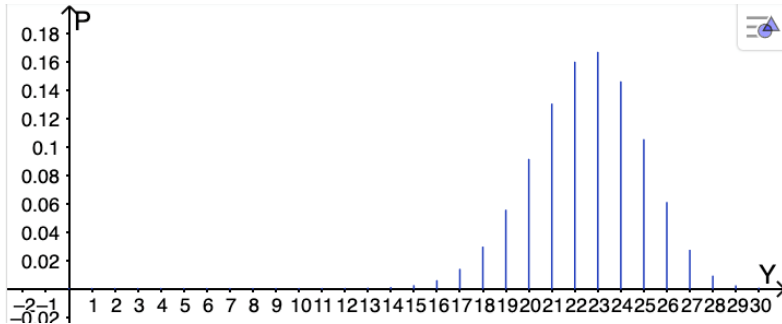
Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(30; 0,25)$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle.



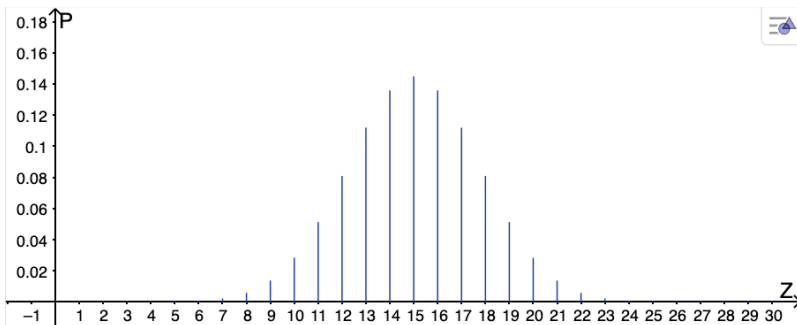
Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



- b) Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(30; 0,75)$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella Y ja pystyakseli kirjaimella P .



- c) Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(30; 0,5)$ ja siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella Z ja pystyakseli kirjaimella P .

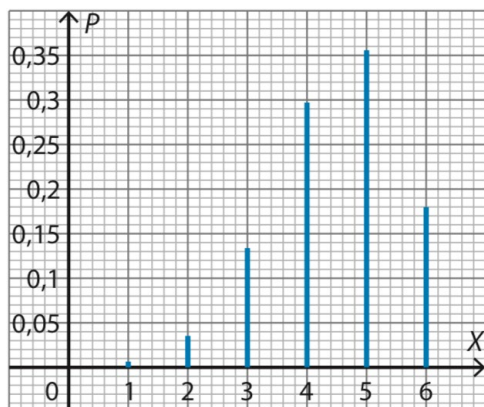


Kun $p = 0,25 < 0,5$ (a-kohta), jakauma on painottunut keskikohdan vasemmalle puolelle.

Kun $p = 0,75 > 0,5$ (b-kohta), jakauma on painottunut keskikohdan oikealle puolelle.

Kun $p = 0,5$ (c-kohta), jakauma on symmetrinen keskikohdan suhteen.

5.13



a) Kuvaajan vaaka-akselin perusteella satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

b) Lasketaan todennäköisyys pylväiden $X=2$, $X=3$ ja $X=4$ perusteella.

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0,035 + 0,135 + 0,300 = 0,47 \approx 0,5$$

c) Korkein pylväs on kohdassa $X=5$, joten satunnaismuuttujan X todennäköisin arvo on 5.

Vastaus

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6

b) 0,5

c) 5

5.14

a) $X \sim \text{Bin}(4; 0,2)$

Satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3 ja 4. Tämä ei vastaa mitään väitettä.

Koska $p = 0,2 < 0,5$,

jakauma on painottunut keskikohdan vasemmalle puolelle.

b) $X \sim \text{Bin}(4; 0,8)$

Satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3 ja 4. Tämä ei vastaa mitään väitettä.

Koska $p = 0,8 > 0,5$,

jakauma on painottunut keskikohdan oikealle puolelle.

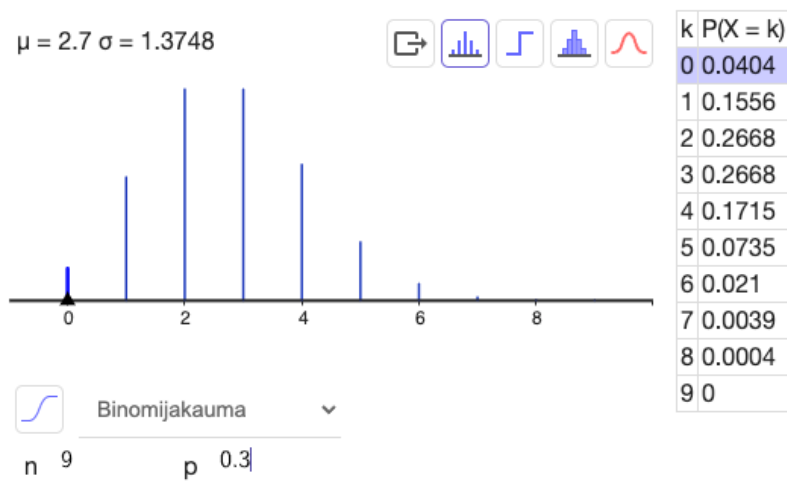
c) $X \sim \text{Bin}(2; 0,5)$

Satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ovat 0, 1 ja 2.

Koska $p = 0,5$, jakauma on symmetrinen keskikohdan suhteen. Tämä ei vastaa mitään väitettä.

5.15

- a) Jakaumassa $\text{Bin}(9; 0,3)$ toistojen lukumäärä $n = 9$. Siis satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9.
- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(9; 0,3)$ esimerkiksi neljän desimaalin tarkkuudella.



- c) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X \leq 3) = 0,0404 + 0,1556 + 0,2668 + 0,2668 = 0,7296 \approx 0,730$$

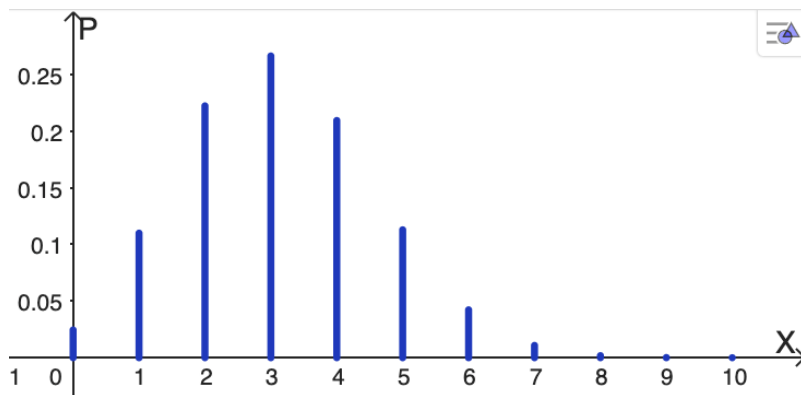
Vastaus

- a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9
- c) 0,730

5.16

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 5$. Yksittäisessä toistossa kaksilapsisen perheen todennäköisyys $p = 0,31$.

- a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla. Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(10; 0,31)$. Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



- b) Kuvaan perusteella arvon 3 todennäköisyys on suurin.
Satunnaismuuttujan X todennäköisin arvo on siis 3 perhettä.

Vastaus

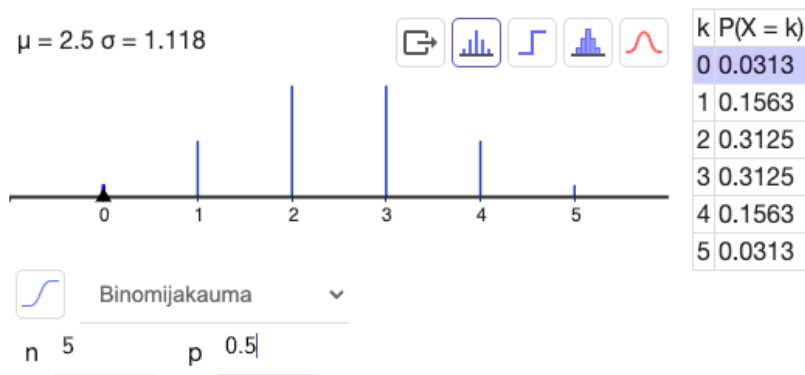
- b) 3 perhettä

5.17

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 5$. Yksittäisessä toistossa oranssin pastillin todennäköisyys $p = 0,5$.

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(5; 0,5)$.



- a) Inka saa todennäköisimmin 2 tai 3 oranssia pastillia.
(Tapahtumien $X=2$ ja $X=3$ todennäköisyydet ovat suurimmat.)
- b) Inka ei saa yhtään oranssia pastillia todennäköisyydellä 0,031.
- c) Lasketaan todennäköisyys, että Inka saa korkeintaan kaksi oranssia pastillia.

$$P(X \leq 2) = 0,0313 + 0,1563 + 0,3125 = 0,5001 \approx 0,50$$

Vastaus

b) 0,031

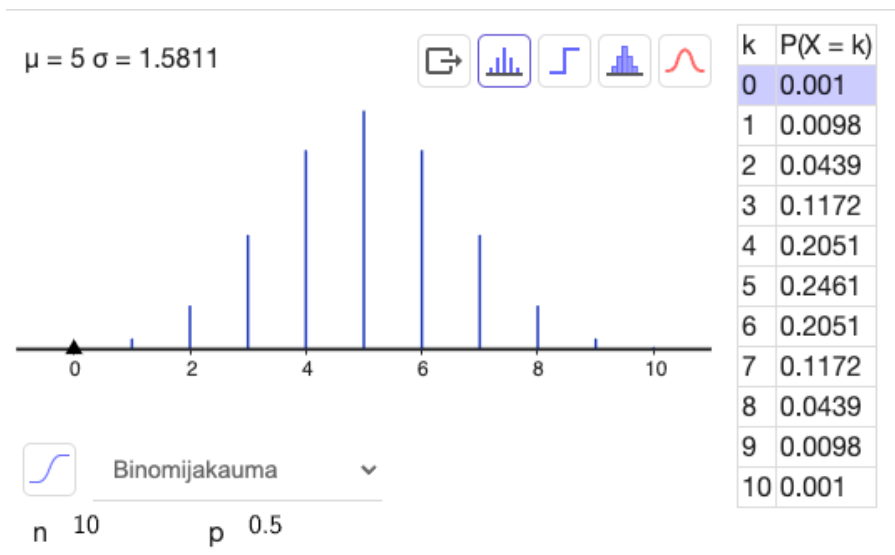
c) 0,50

5.18

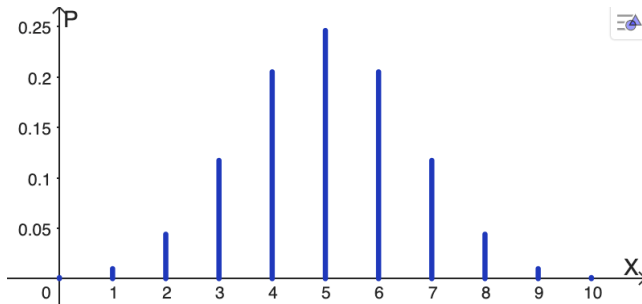
Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 10$. Yksittäisessä toistossa klaavan todennäköisyys $p = 0,5$.

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(10; 0,5)$ neljän desimaalin tarkkuudella.



b) Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



- c) Lasketaan todennäköisyys, että saadaan viisi tai kuusi klaavaa.

$$P = 0,2461 + 0,2051 = 0,4512$$

- d) Klaavoja saadaan enemmän kuin kruunia, jos klaavoja saadaan vähintään 6 kappaletta. Lasketaan todennäköisyys.

$$P = 0,2051 + 0,1172 + 0,0439 + 0,0098 + 0,0010 = 0,3770$$

- e) Todennäköisin klaavojen lukumäärä on 5 klaavaa.

Vastaus

c) 0,4512

d) 0,3770

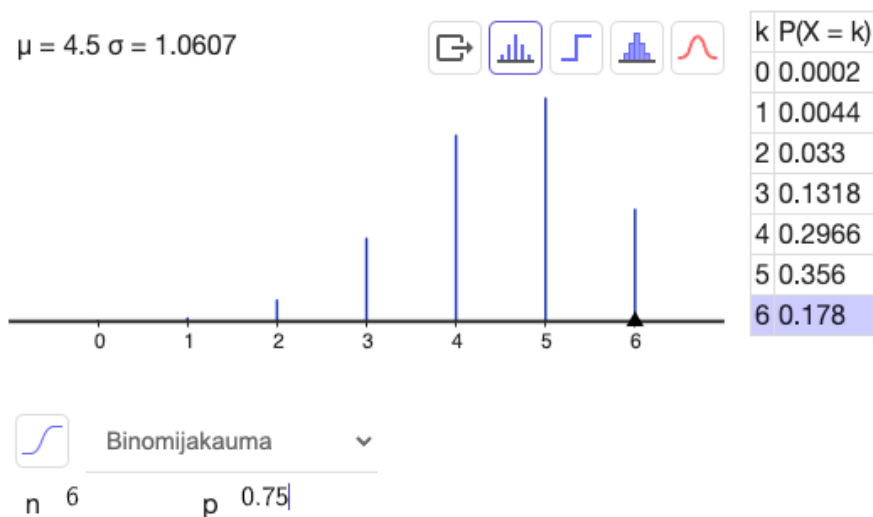
e) 5 klaavaa

5.19

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 6$. Yksittäisessä toistossa eläinhahmon todennäköisyys $p = 0,75$.

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(6; 0,75)$ esimerkiksi neljän desimaalin tarkkuudella.



b) Lasketaan todennäköisyys saada vähemmän kuin neljä eläinhahmoa eli todennäköisyys saada 0, 1, 2 tai 3 eläinhahmoa.

$$P = 0,0002 + 0,0044 + 0,0330 + 0,1318 = 0,1694$$

Täsmälleen neljä eläinhahmoa saadaan todennäköisyydellä

$$P(X = 4) = 0,2966.$$

Siis on todennäköisempää saada täsmälleen 4 eläinhahmoa.

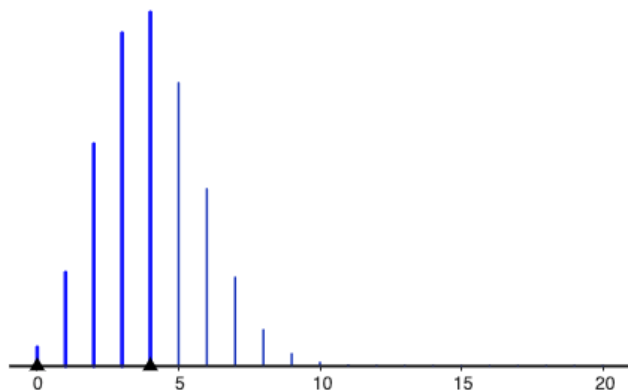
5.20

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 20$. Yksittäisessä toistossa roskapostin todennäköisyys $p = \frac{1}{5} = 0,2$.

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(20; 0,2)$ esimerkiksi neljän desimaalin tarkkuudella.

$\mu = 4$ $\sigma = 1.7889$



Binomijakauma



n 20

p 0.2

k	P(X = k)
0	0.0115
1	0.0576
2	0.1369
3	0.2054
4	0.2182
5	0.1746
6	0.1091
7	0.0545
8	0.0222
9	0.0074
10	0.002
11	0.0005
12	0.0001
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

Viesteistä korkeintaan viidesosa on roskaposteja, jos roskaposteja on korkeintaan $\frac{20}{5} = 4$. Lasketaan todennäköisyys.

$$P = 0,0115 + 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 + 0,2182 = 0,6296 \approx 0,630$$

Vastaus

0,630